# Принцип Дирихле

Знаете ли вы, что среди зрителей, сидящих в Большом театре во время спектакля, обязательно есть люди, родившиеся в один и тот же день одного и того же месяца? Подсчитаем: в зале большого театра 2000 мест. И даже если не все они заполнены (что в этом знаменитом театре бывает нечасто), можно смело утверждать, что на спектакле собралось более 366 человек. Но 366 - это максимально возможное число дней в году, считая 29 февраля. Итак, для 367-го зрителя просто не остаётся свободной от дней рождений его соседей по залу даты в году.

Просто? Тем не менее, это рассуждение даже имеет своё название в математике: принцип Дирихле (в честь немецкого математика Иоганна Петера Густава Лежена Дирихле). По традиции принцип Дирихле почему-то всегда объясняют на примере кроликов в клетках: если общее число кроликов больше числа клеток, в одной из этих клеток наверняка сидит более одного кролика .

Также этот принцип может выглядеть следующим образом: в n клетках невозможно рассадить поодиночке n + 1 кроликов, т.е. найдётся клетка, вкоторой сидят не менее двух кроликов.

Этот принцип можно сформулировать в терминах отображений между множествами: при отображения множества P, содержащего n + 1 элемент, во множество Q, содержащее n элементов, найдутся два элемента множества P, имеющие один и тот же образ .

Таким образом, чтобы применить принцип Дирихле к задаче, надо указать, что принимать за "клетки", а что за "кроликов", а также указать способ, которым надо усаживать "кроликов" в "клетки". В терминах отображений между множествами это означает, что надо указать не только множества Р и Q, но отображение множества Р в Q.

**Задача 1.** В клетках таблицы 3×3 расставлены числа: -1, 0 и 1. Рассмотрим восемь сумм: суммы трёх чисел в каждой строке, в каждом столбце и по двум диагоналям. Могут ли быть все эти суммы различны?

Решение. Предположим, что "клетками" будут все различные значения сумм трех чисел, каждое из которых равно 0, 1 или -1. Этих значений будет 7: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. А "кроликами" будут наборы из трёх чисел, расположенные в одном столбце, или в одной строке, или по одной из двух диагоналей таблицы. Рассаживаем кроликов в клетки, где значение суммы равно сумме чисел этого "кролика"-набора. Тогда согласно принципу Дирихле найдётся "клетка", где сидят не менее двух кроликов. А это значит, что найдутся две рассматриваемые тройки чисел, для которых суммы равны. Итак, все суммы различными быть не могут [2,с19].

**Задача 2.** Шесть школьников съели семь конфет. Докажите, что один из них съел не менее двух конфет.

Решение. Возьмём за "клетки" школьников, а за "кроликов" конфеты. Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдётся школьник, который съел хотя бы две конфеты.

**Задача 3.** В классе 15 учеников. Найдется ли месяц, в котором отмечают свои дни рождения не меньше, чем два ученика этого класса?

Решение. Пусть "клетками" будут месяцы, а "кроликами" - ученики. Используя принцип Дирихле, получим, что найдётся "клетка", в которой сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдётся месяц, в котором отмечают свои дни рождения хотя бы два ученика .

**Задача 4.** В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.

Решение. Примем за "клетки" количество иголок. Всего "клеток" будет 600001 (0,1,2,...600000). А за "кроликов" ёлки. Используя принцип Дирихле получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это иозначает, что найдутся две ёлки имеющие одинаковое количество иголок .

В выше представленных задачах нужно было только найти что принять за "кроликов", а что за "клетки", и применит принцип Дирихле. В следующей задаче надо не только найти что принять за "кролики" и за "клетки", но и найти верное количество клеток.

**Задача 5.** Докажите, что в Вашем классе найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей среди своих одноклассников.

Решение. Предположим, что в классе 30 человек, тогда за "кроликов" возьмём учеников, а за "клетки" количество друзей. Друзей у каждого человека может быть 0, 1, ..., 29, т.е. у нас получится 30 "клеток". Но "клетки" 29 и 0 одновременно существовать не могут, т.к. если человек имеет 29 друзей, то каждый из его друзей будет иметь хотя бы одного друга, значит, всего может быть 29 "клеток" (0, 1, ..., 28 или 1,2,...,29). Используя принцип Дирихле, получим, что найдётся "клетка", где сидят не менее двух "кроликов". А это и означает, что найдутся два человека имеющие одинаковое число друзей.

Можно сделать вывод, что в задачах на принцип Дирихле надо правильно распределить что будет "кроликами", а что "клетками". Также чтобы решить задачу на принцип Дирихле, надо найти правильное число "кроликов" и " клеток" исходя из условия задачи.

#

#  Обобщенный принцип Дирихле

Чаще всего в задачах применяется не Принцип Дирихле, а его обобщение, которое называется обобщённый принцип Дирихле.

Рассмотрим задачи с применением не принципа Дирихле, а некоторого его обобщения, которое сформулировано ниже, и которое обычно встречается в задачах.

Обобщение принципа Дирихле: даны n клеток, и nk + 1 кроликов размещены в эти клетки. Тогда найдется клетка, где сидят не менее k + 1 кроликов .

При решении задач с использованием принципа Дирихле можно поступать двояко:

* 1. Допускать противное и вычисляем, сколько необходимо значений. Сравнивая с данными условиями, приходим к противоречию (задачи 1, 2).
	2. Выбирать, что принять за "клетки" и что взять за "кроликов". Применяя непосредственно принцип Дирихле, устанавливаем существование того, что искали (задача 3).

**Задача 1.** В классе учится 29 человек. Саша Иванов допустил в диктанте 13 ошибок, и никто другой не сделала большего числа ошибок. Доказать, что по крайней мере трое учащихся сделали одинаковое число ошибок.

Решение. Примем за "клетки" всевозможные варианты количества ошибок. Их 14, так как школьники могут сделать 0, 1, ..., 13 ошибок. А за "кроликов" примем школьников, которые писали диктант. Их по условию 29. Каждого из них сажаем в клетку, которая соответствует количеству ошибок сделанных им. Тогда получим, что найдётся "клетка", в которой сидят по меньшей мере три "кролика", а это и означает , что найдутся трое школьников, сделавших одинаковое число ошибок.

**Задача 2.** В пяти классах школы учатся 160 человек. Доказать, что найдутся 4 человека, у которых день рождения приходится на одну и туже неделю.

Решение. В году может быть максимально 53 недели. Их и примем за "клетки" а, за "кроликов" приме ребят. Рассаживаем "кроликов" по тем "клеткам", которые соответствуют их дням рождения. В силу принципа Дирихле найдётся "клетка" по меньшей мере с четырьмя "кроликами", а это и означает, что найдётся неделя, когда день рождения сразу у четырёх человек.

**Задача 3.** У человека на голове не более 400000 волос, в Москве более 8 млн. жителей. Докажите, что найдутся 20 москвичей с одинаковым числом волос.

Решение. По условию на голове у каждого из москвичей может быть от 0 до 400000 волос имеем всего 400001 возможность. Предположим, что утверждение задачи неверно. Тогда лысых москвичей найдется не более 19, имеющих 1 волос тоже не более 19, ..., имеющих 400000 волос тоже не более 20. Но тогда всего москвичей не более 19 ×400001 = 7600019, что меньше 8 миллионов противоречие.